

Exercices *obligatoires* à faire pour la rentrée :

DM facultatif type “oral de concours”

Pour chaque exercice ci-dessous, prévoyez **30 minutes de préparation** au brouillon. Puis prenez le temps nécessaire pour mettre au propre ce que vous avez trouvé sur une copie, *sans ajouter d'argument supplémentaire*.

Exercice 1 (Mines-Ponts PC)

On admet que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, alors toute fonction définie sur I , à valeurs réelles, continue et injective est strictement monotone.

Pour tout x réel, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On pose :

$$\mathcal{E} = \{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} \ f(f(x)) = x + 1 \}.$$

Soit $f \in \mathcal{E}$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x+1) = f(x) + 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'égalité $f(x) = f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor$.
4. On pose $d = f(0)$. Montrer l'encadrement $0 < d < 1$. On note g la restriction de f au segment $[0, d]$. Montrer aussi que g réalise une bijection de $[0, d]$ sur $[d, 1]$ et que celle-ci est continue et strictement croissante.
5. Décrire les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 2 (Centrale MP) – munissez-vous d'un ordinateur avec Python installé

On rappelle la définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$: $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De plus, pour tout ensemble fini E , on note $\text{card}(E)$ le nombre d'éléments de E . On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$C(x) = \{ u \in \mathbb{Z}^2 \mid \|u\| \leq x \} \quad \text{et} \quad C^+(x) = C(x) \cap \mathbb{N}^2.$$

On note

$$N(x) = \text{card}(C(x)) \quad N^+(x) = \text{card}(C^+(x))$$

1. Écrire un programme Python qui calcule $N(x)$ et $N^+(x)$. (*à réécrire sur la copie*)
2. Vérifier numériquement que $4N^+(x) - N(x) - 4\lfloor x \rfloor$ est constant. (*rien à mettre sur la copie*)
3. Le démontrer.
4. Tracer le graphe de l'application $x \mapsto \frac{N(x)}{x^2}$. (*reproduire le graphe sur la copie, inutile de mettre le code*)
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad N^+(n) = \sum_{k=0}^n \left(\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \rfloor + 1 \right)$
6. (**question infaisable à ce stade, ne pas la faire !**) Conjecturer un équivalent de $N(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ et le démontrer.